

ข้อเสนอโครงการวิศวกรรมไฟฟ้า วิชา 2102490 ปีการศึกษา 2559  
การวิเคราะห์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์สำหรับข้อมูลสมองจากการตอบสนองต่อสิ่งเร้า  
Granger causality analysis of task-related fMRI time series

นายปฐวี ปราการกมานันท์ ID 5630349021  
อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร. จิตโกมุท ส่งศิริ  
ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

1	บทนำ	3
2	วัตถุประสงค์	3
3	ข้อมูลสมองแบบ fMRI	4
3.1	หลักการทำงานของเครื่อง MRI scanner . . . . .	4
3.2	Blood-Oxygen-Level-Dependent signal . . . . .	5
4	สภาพเชื่อมโยงของสมอง	6
4.1	ความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ที่ใช้ในสภาพเชื่อมโยงของสมอง . . . . .	6
4.2	ประเภทการทดลองของ fMRI . . . . .	7
4.3	รายละเอียดข้อมูล fMRI ที่ใช้ในโครงการ . . . . .	8
5	แบบจำลองการทำงานของสมอง	10
5.1	การประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุด . . . . .	10
5.2	การประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกที่มีเงื่อนไขเกรนเจอร์ . . . . .	11
6	ผลลัพธ์จากการดำเนินการ	11
6.1	การนำสัญญาณรบกวนออกจากข้อมูล fMRI . . . . .	12
6.2	ค่าความผิดพลาดตกค้างเมื่อเปลี่ยนความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน . . . . .	12
6.3	ความถูกต้องของการประมาณค่าแบบจำลองเมื่อเปลี่ยนจำนวนข้อมูลที่นำมาใช้ในการประมาณ . . . . .	12
6.4	การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสม . . . . .	14
7	สรุปภาพรวมของโครงการ	17
7.1	ขอบเขตของโครงการ . . . . .	17

7.2	ผลลัพธ์ที่คาดหวังจากโครงการ . . . . .	17
7.3	แนวทางการดำเนินการ . . . . .	17
<b>8</b>	<b>ภาคผนวก</b>	<b>19</b>
8.1	Pairwise Granger Causality . . . . .	19
8.2	การประมาณแบบจำลอง ARX ที่มีเงื่อนไขเกรนเจอร์ . . . . .	19
8.3	ชุดคำสั่ง MATLAB ที่ใช้ในโครงการ . . . . .	22

# 1 บทนำ

เทคโนโลยี functional magnetic resonance imaging (fMRI) เป็นเทคโนโลยีที่ใช้ศึกษากระบวนการทำงานของสมองมนุษย์ที่แสดงออกมาเป็นภาพ 3 มิติ หลักการของ fMRI คือการวัดความเข้มข้นของออกซิเจนในเลือด [1] ค่าความเข้มข้นของออกซิเจนที่วัดออกมาเรียกว่าสัญญาณโบลด์ (blood-oxygen-level-dependent หรือ BOLD) สัญญาณโบลด์จะกล่าวละเอียดในหัวข้อ 3 ภาพที่ได้จาก fMRI จะมีจุดที่เล็กที่สุดในภาพเรียกว่าวอกเซล (voxel) สัญญาณโบลด์ในแต่ละวอกเซลแสดงออกมาเป็นตัวเลขสามารถใช้อธิบายระดับออกซิเจนในเลือดของแต่ละตำแหน่งในสมองได้

แบบจำลองถดถอยตัวเอง (Autoregressive model) เป็นหนึ่งในแบบจำลองที่ใช้ในการอธิบายข้อมูล fMRI [2] แบบจำลองถดถอยตัวเองใช้ข้อมูลสัญญาณขาออกในอดีตเพื่อที่จะทำนายค่าสัญญาณขาออกในปัจจุบันแสดงดังสมการ (1)

$$y(t) = A_1y(t-1) + A_2y(t-2) + \dots + A_p y(t-p) + e(t) \quad (1)$$

$y$  คือสัญญาณขาออก,  $e$  คือสัญญาณรบกวน,  $A_k$  เป็นเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาออกในปัจจุบันกับสัญญาณขาออกในอดีต ถ้าเลือกแบบจำลองถดถอยตัวเองมาอธิบายข้อมูล fMRI สัญญาณขาออก คือ ค่าของสัญญาณโบลด์ในแต่ละวอกเซล ข้อดีของการเลือกใช้แบบจำลองถดถอยตัวเอง คือ แบบจำลองเป็นแบบจำลองเชิงเส้นง่ายต่อการทำความเข้าใจ ข้อเสียของการเลือกใช้แบบจำลองถดถอยตัวเอง คือ แบบจำลองไม่สนใจถึงสัญญาณขาเข้าหรือการกระตุ้นที่มาจากภายนอก แต่การทดลอง fMRI โดยทั่วไปมีการกระตุ้นจากภายนอก เช่น การทดลองของ Friston และคณะ [3] มีการกระตุ้นด้วยการเห็นภาพและการขยับเพื่อหาลักษณะของสัญญาณโบลด์โดยใช้แบบจำลองที่เป็น state space model ดังนั้นแบบจำลองที่อธิบายข้อมูล fMRI ควรจะนำสัญญาณขาเข้ารวมเข้าไปในแบบจำลองด้วย โครงการนี้ต้องการศึกษาการนำสัญญาณขาเข้ารวมเข้าไปในแบบจำลองถดถอยตัวเอง จึงได้ปรับปรุงแบบจำลองถดถอยตัวเองเป็นแบบจำลองถดถอยตัวเองที่มีสัญญาณเข้าภายนอก (Autoregressive with Exogenous input model) แบบจำลองถดถอยตัวเองที่มีสัญญาณเข้าภายนอกมีพจน์ของสัญญาณขาเข้าเพิ่มเข้าไปในแบบจำลองดังสมการ (2)

$$y(t) = A_1y(t-1) + \dots + A_p y(t-p) + B_1u(t-1) + \dots + B_q u(t-q) + e(t) \quad (2)$$

$y$  คือสัญญาณขาออก,  $u$  คือสัญญาณขาเข้า,  $e$  คือสัญญาณรบกวน,  $A_k$  เป็นเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาออก ณ ปัจจุบันกับในอดีต,  $B_k$  เป็นเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาออกในปัจจุบันกับสัญญาณขาเข้าในอดีต

การศึกษาค้นคว้าเชื่อมโยงของสมองแต่ละส่วนว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร วิธีการหนึ่งคือการวิเคราะห์ผ่านค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองที่ใช้อธิบายข้อมูลสมอง การประมาณค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นก็มีหลายวิธีการ วิธีการหนึ่งที่ยนิยมใช้คือการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุด (least squares) เพราะไม่ซับซ้อนและไม่จำเป็นต้องใช้ข้อมูลของสัญญาณรบกวน สภาพการเชื่อมโยงของสมองไม่จำเป็นว่าทุกส่วนของสมองจะต้องมีความสัมพันธ์กัน ณ voxel หนึ่งอาจจะไม่ส่งผลกับอีก voxel หนึ่งก็ได้ สำหรับแบบจำลองถดถอยตัวเอง (1) การที่ voxel ที่  $j$  ไม่ส่งผลต่อ voxel ที่  $i$  ก็ต่อเมื่อ  $(A_k)_{ij} = 0$  ที่ทุกค่า  $k = 1, 2, \dots, p$  การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดจะเกิดเหตุการณ์ที่  $(A_k)_{ij} = 0$  ได้ยาก ดังนั้น การหารูปแบบของ  $(A_k)_{ij} = 0$  ต้องบังคับให้เกิดโดยการเพิ่มฟังก์ชันลงโทษแบบนอร์ม-1 ( $\ell_1$ -regularized) ในการประมาณค่าแบบกำลังสองต่ำสุด

โครงการนี้เลือกใช้แบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณเข้าภายนอก เพื่อศึกษาผลการกระตุ้นภายนอกมีผลต่อการเชื่อมโยงของสมองอย่างไร วิธีการศึกษาประกอบด้วย การเลือกลักษณะของแบบจำลอง การประมาณแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุด วิเคราะห์ความซับซ้อนของแบบจำลองที่เหมาะสมและวิเคราะห์รูปแบบของ  $(A_k)_{ij} = 0$  ด้วยการประมาณแบบจำลองด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดที่เพิ่มฟังก์ชันลงโทษแบบนอร์ม-1 รวมทั้ง วิเคราะห์ความถูกต้องของแบบจำลอง โครงการนี้หวังว่า แบบจำลองถดถอยตัวเองที่มีสัญญาณขาเข้าภายนอกสามารถใช้กับข้อมูล fMRI เบื้องต้นที่มีการกระตุ้นด้วยการเห็นภาพและการขยับได้

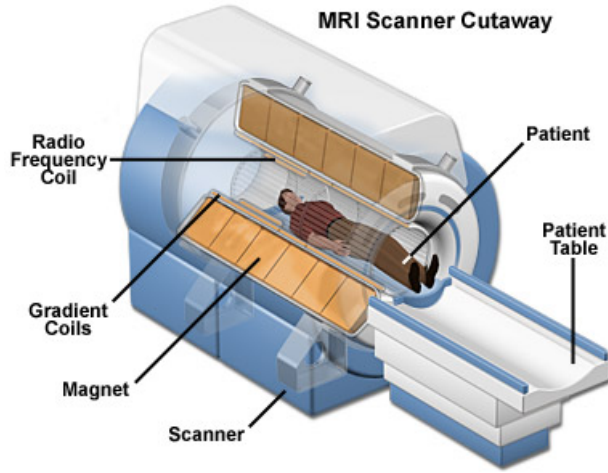
## 2 วัตถุประสงค์

ในโครงการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

- เพื่อศึกษาและประยุกต์ใช้แบบจำลองที่เหมาะสมในการเรียนรู้ความเชื่อมโยงของสมองในสถานะถูกกระตุ้นด้วยสิ่งเร้า
- เพื่อพัฒนาวิธีเชิงเลขในรูปแบบโปรแกรมเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าแบบจำลองถดถอยตัวเองที่มีสัญญาณขาเข้า

### 3 ข้อมูลสมองแบบ fMRI

Functional magnetic resonance imaging (fMRI) เป็นภาพแสดกนเกิดจากข้อมูลจากเครื่อง MRI ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่สามารถวัดการทำงานของสมองได้ ข้อมูล fMRI จะแสดงในรูปแบบของสัญญาณโบลด์

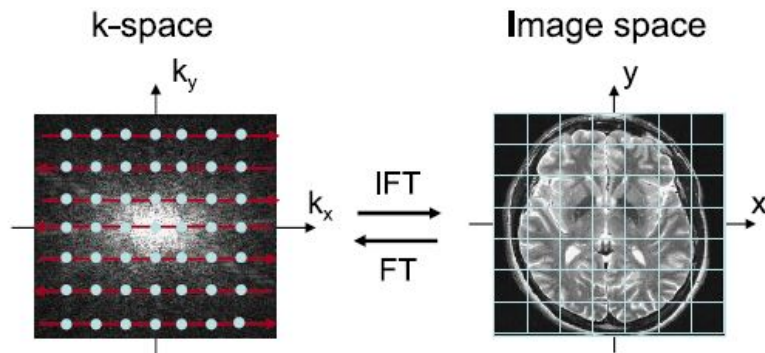


รูปที่ 1: เครื่อง MRI scanner (ตรวจสอบสุขภาพลึกเข้าไป'MRI'เห็นข้างในรู้ทันโรค) [5]

#### 3.1 หลักการทำงานของเครื่อง MRI scanner

รูปที่ 1 แสดงโครงสร้างเครื่อง MRI scanner โดยเครื่อง MRI สร้างภาพแสดกนโดยการจ่ายสนามแม่เหล็กหลายหลายความถี่เข้าไปในคน เมื่อนิวเคลียสของอะตอมในของเหลวทั้งร่างกายได้รับสนามแม่เหล็กจะเกิดการกำธรขึ้น ทำให้เกิดการรับพลังงานและคายพลังงานออกมา ซึ่งพลังงานที่คายออกมานั้นเป็นผลกรแปลงฟูเรียร์เพราะเครื่อง MRI ใส่สนามแม่เหล็กในรูปแบบของความถี่ ดังนั้นเมื่อนำค่าพลังงานที่คายออกมาแปลงผลกลับของการแปลงฟูเรียร์จะสามารถสร้างภาพ 3 มิติได้ ดังแสดงในรูป 2 โดยภาพจะประกอบด้วยจุดหลายๆจุดในภาพคือวอกเซล โดยแต่ละวอกเซลมีความหมายคล้ายกับจุดภาพ (pixel) โดย จุดภาพจะอธิบายในภาพแบบสองมิติ แต่วอกเซลนั้นจะอธิบายเป็นในรูปแบบของปริมาตร ข้อมูลของ MRI ที่ได้นั้นขนาดวอกเซลควรเล็กที่สุดและค่าของการได้มาของข้อมูลควรมีความถี่สูง ซึ่งขึ้นอยู่กับข้อจำกัดของเครื่อง MRI

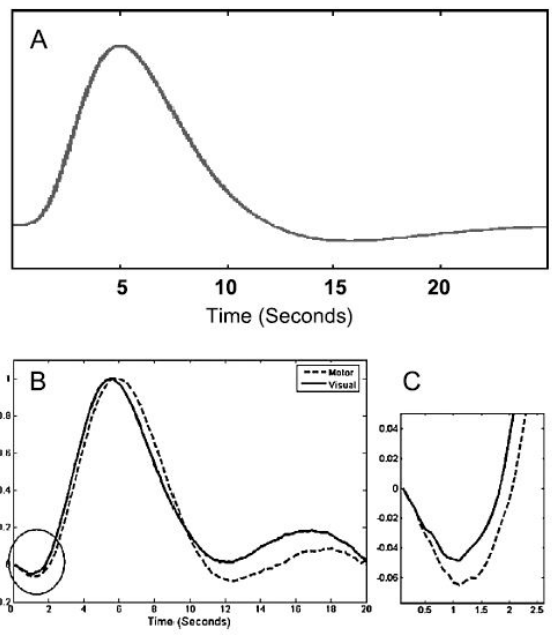
ข้อมูลจากเครื่อง MRI เป็นข้อมูลที่เกิดการประมวผลทั้งร่างกาย แต่ข้อมูลที่ต้องใช้ในการวิเคราะห์ต้องเป็นข้อมูลที่เกิดการกทำงานของเซลล์ประสาทในสมองเท่านั้น ดังนั้นเราจำเป็นต้องแยกเฉพาะสัญญาณในสมองออกมา จึงมีการตั้งสมมุติฐานว่า การใช้เอกซิเจนในเซลล์ประสาทควรจะสื่อถึงการทำงานของสมองได้ โดยสัญญาณนั้นเรียกว่าสัญญาณโบลด์ แล้วเราจะวัดสัญญาณโบลด์แทนการวัดทำงานของสมองโดยตรง [1]



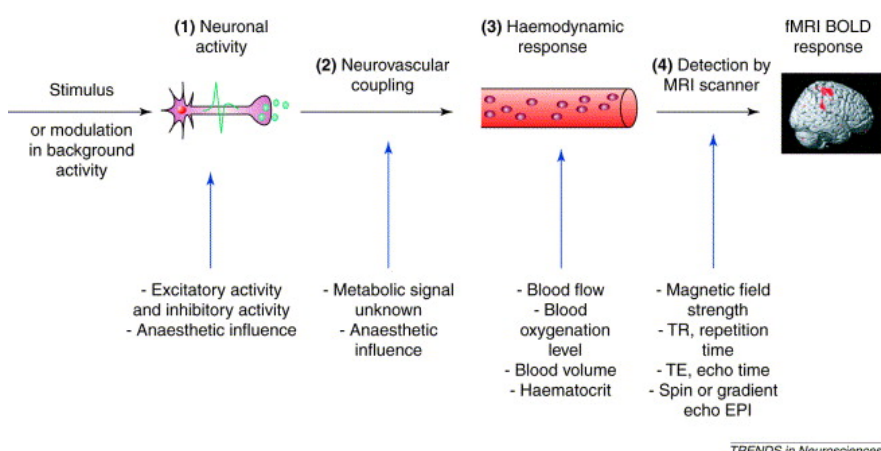
รูปที่ 2: การแปลงฟูเรียร์เพื่อที่จะได้ภาพจากเครื่อง MRI (The Statistical analysis of fMRI data) [1]

### 3.2 Blood-Oxygen-Level-Dependent signal

สัญญาณโบลต์วัดจากความต่างของออกซิเจนในเลือดผ่านสมบัติทางแม่เหล็กของเลือดที่มีออกซิเจนและไม่มีออกซิเจน [1] ผ่านคุณสมบัติทางแม่เหล็กของฮีโมโกลบิน ฮีโมโกลบินที่อยู่ในเลือดทั้งที่เป็นฮีโมโกลบินที่มีออกซิเจน (Oxyhemoglobin) และฮีโมโกลบินที่ไม่มีออกซิเจน (Deoxyhemoglobin) มีคุณสมบัติแม่เหล็กที่ต่างกันคือเป็น diamagnetic และ paramagnetic ตามลำดับ เมื่อเลือดรับสนามแม่เหล็กจากเครื่อง MRI สามารถรับรู้ถึงความต่างสนามแม่เหล็กของบริเวณที่มีออกซิเจนอยู่ในเลือดและบริเวณที่ไม่มีออกซิเจนอยู่ในเลือดได้ ลักษณะของสัญญาณ BOLD ได้แสดงดังในรูปที่ 3 ค่าของสัญญาณ BOLD นั้นมีความสัมพันธ์กับการทำงานของระบบประสาท โดยผ่าน Hemodynamic response function (HRF) คือฟังก์ชันถ่ายโอนจากการทำงานของสมองเป็นสัญญาณโบลต์ที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้น ลักษณะการทำงานของ HRF ได้แสดงดังในรูปที่ 4 [1, 6] สัญญาณโบลต์ ที่ได้มานั้นมีทั้งสัญญาณของการทำงานในสมองและผลของสัญญาณในกลไกอื่นๆในร่างกาย เช่น สัญญาณการหายใจ สัญญาณการเต้นของหัวใจ แต่ในการวิเคราะห์การทำงานของสมองนั้นต้องมีการนำสัญญาณรบกวนออกก่อนนำมาใช้ในวิเคราะห์สภาพเชื่อมโยงของสมอง



รูปที่ 3: ตัวอย่างสัญญาณ BOLD [1]



รูปที่ 4: ความสัมพันธ์สัญญาณ BOLD กับการทำงานในระบบประสาท (How well do we understand the neural origins of the fMRI BOLD signal?) [7]

## 4 สภาพเชื่อมโยงของสมอง

การวิเคราะห์สภาพเชื่อมโยงของสมองเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของส่วนต่างๆ ในสมอง สามารถแบ่งได้เป็น 3 ประเภท [8] คือสภาพเชื่อมโยงเชิงโครงสร้าง (structural connectivity), สภาพเชื่อมโยงเชิงฟังก์ชัน (functional connectivity) และสภาพเชื่อมโยงเชิงประสิทธิภาพ (effective connectivity) การศึกษานี้สนใจสภาพเชื่อมโยงเชิงฟังก์ชันและเชิงประสิทธิภาพ เพราะสภาพเชื่อมโยงเชิงโครงสร้างเป็นการวิเคราะห์การเชื่อมโยงของเซลล์ประสาทในสมองเท่านั้น [9, 8, 10] และผลการศึกษาสภาพเชื่อมโยงเชิงโครงสร้างพบว่าการทำงานของสมองบริเวณที่ใกล้กันไม่จำเป็นต้องทำงานพร้อมกัน [9, 8]

สภาพเชื่อมโยงสมองเชิงฟังก์ชันคือการใช้ค่าทางสถิติวิเคราะห์การเชื่อมโยงของสมอง [9] เช่น ค่า Cross covariance, ค่า Pearson Correlation coefficient, ค่า Partial Correlation ตัวอย่างเช่น การใช้สภาพเชื่อมโยงเชิงฟังก์ชันของ Zhang และคณะ [11] Zhang และคณะได้วิเคราะห์ระหว่างคนปกติกับคนที่ เป็นอัลไซเมอร์ โดยมีสมมุติฐานว่าคนที่ เป็นอัลไซเมอร์ มีความผิดปกติในส่วนของสมอง Zhang และคณะสามารถแยกคนปกติกับคนที่ เป็นอัลไซเมอร์ได้โดยผ่านการวิเคราะห์สภาพเชื่อมโยงเชิงฟังก์ชัน การวิเคราะห์ผ่านสภาพเชื่อมโยงสมองเชิงฟังก์ชันใช้ได้ ณ เวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น เมื่อเวลาผ่านไปผลการวิเคราะห์สภาพเชื่อมโยงสมองฟังก์ชันอาจจะเปลี่ยนไปได้

สภาพเชื่อมโยงสมองเชิงประสิทธิภาพ เป็นการอธิบายการเชื่อมโยงของสมองโดยใช้สมการพลวัตและวิเคราะห์ผ่านพารามิเตอร์บนแบบจำลองที่เลือกใช้อธิบาย ความซับซ้อนของการวิเคราะห์สภาพเชื่อมโยงสมองเชิงประสิทธิภาพขึ้นกับลักษณะแบบจำลองที่เลือกใช้และวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง หนึ่งในแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์สภาพเชื่อมโยงสมองเชิงประสิทธิภาพคือ Granger Causal Modeling ซึ่งเป็นการสร้างแบบจำลองที่มีโครงสร้างเชิงสาเหตุในแบบจำลองเชิงเส้นและมีเงื่อนไขของความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ (Granger causality) [8, 12]

**Granger Causal Modeling (GCM)** เป็นการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นจากข้อมูลอนุกรมเวลา แบบจำลองที่สร้างจะมีโครงสร้างเชิงสาเหตุ แบบจำลองที่มีโครงสร้างเชิงสาเหตุหมายความว่าค่าของสัญญาณในแบบจำลอง ณ ปัจจุบันขึ้นกับค่าของสัญญาณในอดีตเท่านั้น แบบจำลองเชิงเส้นที่มีโครงสร้างเชิงสาเหตุอย่างง่ายคือแบบจำลองถดถอยตัวเอง ดังสมการ

$$y(t) = A_1y(t-1) + A_2y(t-2) + \dots + A_p y(t-p) + e(t) \quad (3)$$

Granger Causal Modeling เป็นการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่ไม่ได้มีแค่มีโครงสร้างเชิงสาเหตุเท่านั้น แต่ต้องมีเงื่อนไขของความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์เข้าไปด้วย ความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์มีแนวคิดอย่างง่ายว่า ถ้าค่าของ  $y$  มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุกับ  $x$  จะได้ว่าค่า  $y$  ในอดีตจะช่วยในการคำนวณค่า  $x$  ในปัจจุบันได้ แต่ถ้าค่า  $y$  ไม่มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุกับ  $x$  จะได้ว่าค่าการรู้ค่า  $y$  ในอดีตไม่มีส่วนช่วยในหาค่า  $x$  ในปัจจุบัน การประยุกต์การให้เหตุผลแบบเกรนเจอร์ในแบบจำลองถดถอยตัวเอง (3) จะได้ว่า ถ้าค่าของ  $y_j$  ไม่มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุแบบเกรนเจอร์กับ  $y_i$  จะได้เงื่อนไขในแบบจำลองว่า [12]

$$(A_k)_{ij} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

### 4.1 ความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ที่ใช้ในสภาพเชื่อมโยงของสมอง

การศึกษาความสัมพันธ์ของบริเวณต่างๆ ในสมองที่ใช้สมการพลวัตที่อธิบายความเกี่ยวข้องกันของสัญญาณสมอง นิยมใช้แบบจำลองถดถอยตัวเอง (3) วิเคราะห์สภาพการเชื่อมโยงของสมองเชิงประสิทธิภาพ การใช้ความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ในแบบจำลองถดถอยตัวเอง เป็นเทคนิคที่สามารถหาค่าของ  $(A_k)_{ij} = 0$  โดย  $k = 1, 2, \dots, p$  หรือการหาค่าของ  $y_j$  ไม่มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุ  $y_i$  ใดบ้าง การตรวจสอบด้วยความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ที่นิยมใช้มี 2 วิธีคือ Pairwise Granger Causality และ Conditional Granger Causality แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเพียง Conditional Granger Causality เท่านั้น ส่วนของ Pairwise Granger Causality จะกล่าวถึงใน 8.1 (ภาคผนวก)

#### Conditional Granger Causality

Conditional Granger Causality เป็นการตรวจสอบความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์สำหรับตัวแปรที่มีมากกว่า 2 ตัวแปรขึ้นไป ตัวอย่างเช่น กลุ่มข้อมูล  $x(t)$ ,  $y(t)$  และ  $z(t)$  เมื่อต้องการพิสูจน์ว่า  $y(t)$  มีผลต่อ  $x(t)$  หรือไม่ โดยที่  $x(t)$  และ  $z(t)$

มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุซึ่งกันและกัน สามารถสร้างสมการได้ว่า

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a_k x(t-k) + \sum_{k=1}^p b_k z(t-k) + \epsilon_1(t) \quad (4)$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^p c_k z(t-k) + \sum_{k=1}^p d_k x(t-k) + \nu_1(t) \quad (5)$$

โดยมีเมทริกซ์ความแปรปรวนดังนี้

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Upsilon_1 \\ \Upsilon_1 & \Gamma_1 \end{bmatrix}$$

ถ้า  $y(t)$  มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุกับ  $x(t)$  และ  $z(t)$  จะได้ว่า

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a'_k x(t-k) + \sum_{k=1}^p b'_k y(t-k) + \sum_{k=1}^p c'_k z(t-k) + \epsilon_2(t) \quad (6)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^p d'_k x(t-k) + \sum_{k=1}^p e'_k y(t-k) + \sum_{k=1}^p g'_k yz(t-k) + \nu_2(t) \quad (7)$$

$$z(t) = \sum_{k=1}^p u'_k x(t-k) + \sum_{k=1}^p v'_k y(t-k) + \sum_{k=1}^p w'_k z(t-k) + \lambda_2(t) \quad (8)$$

จะหาเมทริกซ์ความแปรปรวนได้ว่า  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{bmatrix}$  จากสมการด้านบนเราจะหาว่า  $y(t)$  มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุต่อ  $x(t)$  โดยพิจารณาค่า

$$F_{y \rightarrow x|z} = \log\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_{xx}}\right)$$

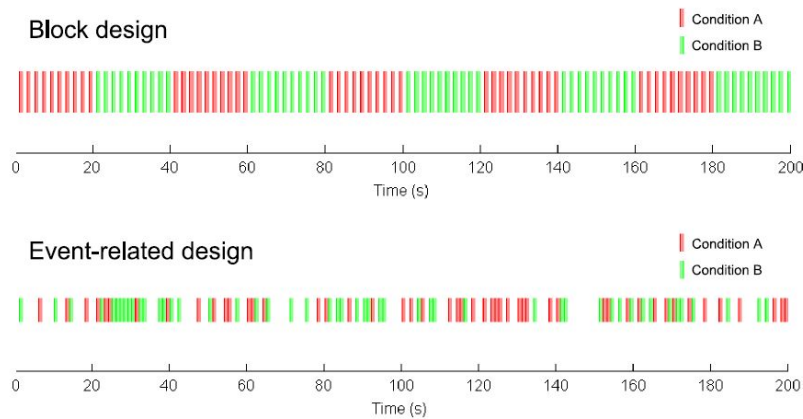
$\Sigma_1$  คือความแปรปรวนที่มาจาก ความผิดพลาดตกค้าง (residual error) ของแบบจำลองที่ไม่รวมผลของ  $y(t)$  และหลังจากเพิ่ม  $y(t)$  เข้าไปใน (4) แล้วได้ว่า  $F_{y \rightarrow x|z} = 0$  หรือ  $\Sigma_1 = \Sigma_{xx}$  หมายความว่า การรวม  $y(t)$  เข้าไปใน (4) ไม่มีส่วนช่วยในการหาค่า  $x(t)$  ได้แม่นยำขึ้น หรือ  $y(t)$  ไม่มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุกับ  $x(t)$  แสดงว่า  $b'_k = 0$  ทุก  $k = 1, 2, \dots, p$  แต่หาก  $F_{y \rightarrow x|z} > 0$  หรือ  $\Sigma_1 > \Sigma_{xx}$  หมายความว่า การรวม  $y(t)$  ใน (4) มีส่วนช่วยในการหาค่า  $x(t)$  ได้แม่นยำขึ้น หรือ  $y(t)$  มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุกับ  $x(t)$  แสดงได้ว่า  $b'_k \neq 0$  ทุก  $k = 1, 2, \dots, p$  เมื่อนำไปใช้ในแบบจำลองถดถอยตัวเอง ถ้า  $y_j$  ไม่มีความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์กับ  $y_i$  ก็ต่อเมื่อ  $(A_k)_{ij} = 0$  ทุก  $k = 1, 2, \dots, p$

## 4.2 ประเภทการทดลองของ fMRI

การออกแบบการทดลอง fMRI มีความซับซ้อน ถ้าต้องการออกแบบการทดลองให้ผลการกระตุ้นภายนอกมีความสอดคล้องกับสิ่งที่กระตุ้นเข้าไป การออกแบบสิ่งที่กระตุ้นเข้าไปควรมีความสอดคล้องกับกิจกรรมประจำวัน การวิเคราะห์หลังจากการทดลองรูปแบบนี้จะสามารถประมาณแบบจำลองได้ไม่ลำบาก แต่ถ้าต้องการออกแบบการทดลองเพื่อที่จะทราบลักษณะของ HRF ต้องออกแบบการทดลองให้มีการสุ่มที่มาก เพราะ เมื่อวิเคราะห์สัญญาณขาเข้าในเชิงความถี่ การที่ค่ามีการสุ่มมากจะสามารถเข้าใจถึงลักษณะ HRF ได้ดีกว่าการสุ่มที่น้อย การประมาณค่าในแบบจำลองและการเรียนรู้ลักษณะของ HRF เป็นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงในการออกแบบการทดลองเสมอ นักประสาทวิทยาส่วนใหญ่ได้ออกแบบการทดลองเป็น 2 รูปแบบหลัก คือ Block design และ Event related design

Block design เป็นการออกแบบการทดลองโดยการกระตุ้นที่มีความต่อเนื่อง รูปที่ 5 แสดงตัวอย่างการทดลองแบบ Block design โดยมีการกระตุ้นสองแบบคือ แบบ A และ แบบ B การทดลองมีการกระตุ้นแบบ A และแบบ B สลับไปมาในช่วงเวลาที่เท่ากัน การกระตุ้นแต่ละแบบจะแทนด้วยสัญญาณขาเข้าแบบ delta function โดยขนาดของ delta function ขึ้นกับผู้ทดลองกำหนด

Event-related design เป็นการออกแบบการทดลองที่มีการกระตุ้นเป็นแบบสุ่มเชิงเวลา รูปที่ 5 แสดงตัวอย่างการทดลอง โดยมีการกระตุ้นสองแบบคือ A และ B โดยทั้งสองเป็นการกระตุ้นแบบสุ่มเชิงเวลา การกระตุ้นแต่ละแบบจะแทนด้วยสัญญาณขาเข้าแบบ delta function โดยขนาดของ delta function ขึ้นกับผู้ทดลองกำหนด ในโครงการนี้ใช้ข้อมูล fMRI ที่มีการทดลองแบบ Event-related จะกล่าวละเอียดในหัวข้อ 4.3



รูปที่ 5: แสดงการออกแบบการทดลองของ block design และ event-related design block design เป็นการออกแบบสัญญาณขาเข้าที่มีความต่อเนื่องของ delta function event-related design ที่การกระจายของ delta function แบบสุ่ม (The Statistical analysis of fMRI data) [1]

### 4.3 รายละเอียดข้อมูล fMRI ที่ใช้ในโครงการ

ข้อมูล fMRI ที่ได้จาก [4] มีรายละเอียดดังนี้ ผู้เข้าร่วมการทดลองเป็นคนที่ถนัดมือขวาสุขภาพดีและมีอายุอยู่ในช่วง 22–30 ปี การทดลองมีการแบ่งเป็น 2 ส่วน มีช่วงเวลาในการทดลองแต่ละส่วนคือ 240 วินาที และมีการสุ่มตัวอย่างทุก 0.1 วินาที รวม 2400 จุดเวลา

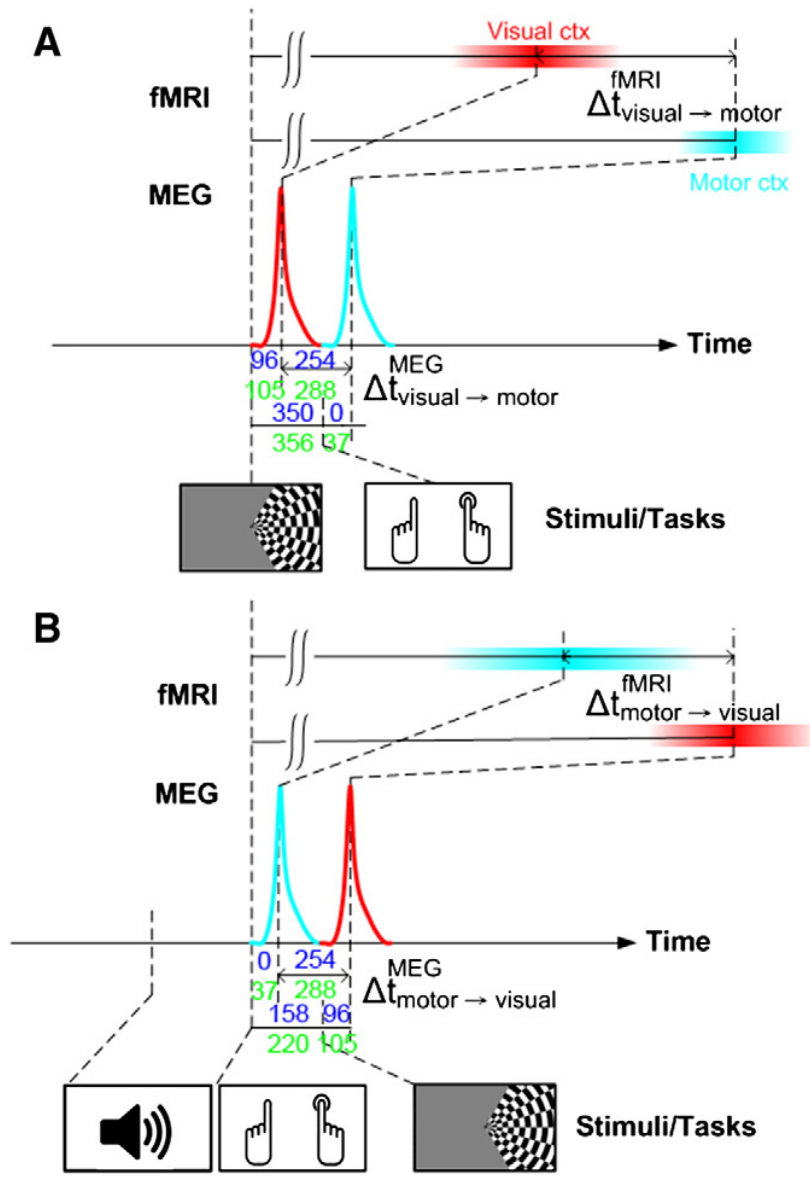
การทดลองแรกนั้นจะเรียกว่าการทดลองแบบ Visual→Motor (VM) การทดลองนี้จะมีการกระตุ้นด้วยการเห็นภาพก่อนจากนั้นจะให้ผู้เข้าร่วมการทดลองกดปุ่ม โดยถ้าภาพปรากฏทางซ้ายผู้เข้าร่วมทดลองต้องกดปุ่มที่อยู่ทางซ้าย ถ้ารูปขึ้นทางด้านขวาก็ให้ผู้เข้าร่วมทดลองต้องกดปุ่มทางด้านขวา การกระตุ้นนี้เป็นการสุ่มแบบเอกรูป ในช่วง 4–16 วินาที

การทดลองแบบที่ 2 จะเรียกว่าการทดลองแบบ Motor→Visual (MV) การทดลองนี้จะคล้ายกับการทดลองแบบ VM แต่เริ่มด้วยการได้ยินเสียง เมื่อผู้เข้าร่วมทดลองได้ยินเสียงหลังจากนั้นจึงกดปุ่ม โดยถ้าผู้เข้าร่วมทดลองได้ยินเสียงที่มีความถี่ 1 KHz ผู้เข้าร่วมการทดลองต้องกดปุ่มทางซ้ายและเห็นภาพจะปรากฏทางซ้าย และถ้าผู้เข้าร่วมการทดลองได้ยินเสียงที่มีความถี่ 4 KHz ผู้เข้าร่วมการทดลองต้องกดปุ่มทางขวาหลังจากเห็นภาพปรากฏทางด้านขวา การกระตุ้นนี้เป็นการสุ่มแบบเอกรูป ช่วงเวลา 4–16 วินาทีเช่นกัน

ค่าของสัญญาณขาเข้าจากข้อมูลดิบถูกกำหนดเป็น 0 เมื่อไม่มีการกระตุ้น, เป็น 1 เมื่อมีการกระตุ้นด้านซ้าย และ เป็น 2 เมื่อมีการกระตุ้นด้านขวา โดยการทดลองแบบ VM สัญญาณขาเข้าคือการกระตุ้นโดยการเห็นภาพ ซึ่งมีการเก็บข้อมูลการกระตุ้นไว้แล้ว แต่การทดลองแบบ MV เป็นการกระตุ้นด้วยเสียง ซึ่งไม่มีข้อมูลจึงมีการสมมุติว่าผู้เข้าร่วมการทดลองจะกดทันทีที่ได้ยินเสียงแล้วใช้ข้อมูลการกดแทน ในการประมาณสภาพการเชื่อมโยงของสมองนี้โดยผ่านแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณเข้าภายนอก เราสามารถออกแบบสัญญาณขาเข้าของแบบจำลองได้ว่าจะมีขนาดเป็นเท่าไร โดยมีรูปแบบที่ควรเลือกอยู่ 2 แบบคือการให้เวกเตอร์  $u$  นั้นมีขนาดเป็น 1 หรือ 2 โดยถ้าขนาดของเวกเตอร์  $u$  เป็น 1 ถ้าค่าเป็น 0 หมายความว่าไม่มีการกระตุ้นภายนอก มีค่าเป็น 1 มีเมื่อการกระตุ้นทางด้านซ้ายและมีค่าเป็น -1 การกระตุ้นทางด้านขวา การออกแบบนี้มีข้อดีคือแบบจำลองที่ใช้มันจะไม่มีควมซับซ้อนและเป็นรูปแบบที่ง่ายที่สุดในแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก แต่ว่าแบบจำลองนั้นมีความลำบาก



ในการเข้าใจว่าการกระตุ้นทั้ง 2 ให้ผลที่แตกต่างกันอย่างไร โดยถ้าขนาดเวกเตอร์  $u$  เป็น 2 จะมีค่า  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  เมื่อไม่มีสัญญาณกระตุ้น มีค่าเป็น  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  เมื่อมีการกระตุ้นจากทางด้านซ้ายและ  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  เมื่อมีการกระตุ้นจากทางด้านขวา จะเห็นว่าถ้าออกแบบเวกเตอร์  $u$  มีขนาดเป็น 2 มีข้อเสียคือความซับซ้อนในแบบจำลองเพิ่มขึ้น จำนวนของพารามิเตอร์ในแบบจำลองเพิ่มขึ้น ทำให้การประมาณแบบจำลองนั้นมีความลำบากเพราะขนาดของ  $B$  ต้องใหญ่ขึ้น แต่มีข้อดีคือจะสามารถเห็นผลของสัญญาณจากด้านขวาและด้านซ้ายได้ชัดเจนว่า การกระตุ้นแต่ละแบบส่งผลต่ออวกเซลใดบ้าง



รูปที่ 6: A:การทดลองแบบ VM, B:การทดลองแบบ MV (fMRI hemodynamics accurately reflects neuronal timing in the human brain measured by MEG) [4]

## 5 แบบจำลองการทำงานของสมอง

แบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก (Autoregressive model with exogenous inputs) เป็นแบบจำลองที่มีความคล้ายกับแบบจำลองถดถอยตัวเอง (Autoregressive model) แต่มีการเพิ่มส่วนของสัญญาณขาเข้าไปในระบบ โดยโครงสร้างนี้ใช้แบบจำลองแบบถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก เนื่องจาก

1. แบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้า เป็นแบบจำลองเชิงเส้นทำให้ง่ายต่อการคำนวณ
2. เราตั้งสมมุติฐานเมื่อมีการกระตุ้นภายนอกจะทำให้แบบจำลองทำนายได้ดีขึ้น

แบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกมีสมการทั่วไปว่า

$$y(t) = \sum_{i=1}^p A_i y(t-i) + \sum_{j=1}^q B_j u(t-j) + v(t) \quad (9)$$

โดย  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$  และ  $v \in \mathbb{R}^n$  เมื่อ  $y$  คือสัญญาณโพลต์ ในแต่ละวอกเซล,  $u$  คือสัญญาณกระตุ้นภายนอก,  $v$  คือสัญญาณรบกวน,  $p$  คืออันดับของการถดถอยของตัวเอง,  $q$  คืออันดับการถดถอยของสัญญาณขาเข้า

### 5.1 การประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุด

วิธีที่นิยมใช้ในการประมาณหาแบบจำลองคือวิธีกำลังสองต่ำสุด (least squares) เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่ายและมีผลเฉลยที่ชัดเจน เมื่อประยุกต์วิธีกำลังสองต่ำสุดนี้มาใช้ในการหาแบบจำลองแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก ปัญหากำลังสองต่ำสุดในแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก คือปัญหา

$$\underset{A, B}{\text{minimize}} \sum_{t=p+1}^N \left\| y(t) - \sum_{j=1}^p A_j y(t-j) - \sum_{j=1}^q B_j u(t-j) \right\|_2^2 \quad (10)$$

เมื่อมีข้อมูล  $y(1), y(2), \dots, y(N), u(1), u(2), \dots, u(N)$  แล้วเราสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} Y &= [y(p+1) \quad y(p+2) \quad y(p+3) \quad \dots \quad y(N)] \\ A &= [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_p] \\ B &= [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_q] \\ H &= \begin{bmatrix} y(p) & y(p+1) & y(p+2) & \dots & y(N-1) \\ y(p-1) & y(p) & y(p+1) & \dots & y(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(1) & y(2) & y(3) & \dots & y(N-p) \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} u(p) & u(p+1) & u(p+2) & \dots & u(N-1) \\ u(p-1) & u(p) & u(p+1) & \dots & u(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(p-q+1) & u(p-q+2) & u(p-q+3) & \dots & u(N-q) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้นปัญหาสมการ (10) จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\underset{A, B}{\text{minimize}} \|Y - AH - BK\|_F^2 \quad (11)$$

กำหนดให้

$$\theta = [A \quad B], L = \begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix} \quad (12)$$

ปัญหาใน (10) สามารถเปลี่ยนเป็นปัญหา

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \|Y - \theta L\|_F^2$$

โดยเงื่อนไขที่ทำให้  $\|Y - \theta L\|_F^2$  ต่ำที่สุดคืออนุพันธ์ของ  $\|Y - \theta L\|_F^2$  มีค่าเท่ากับ 0

$$\frac{d}{d\theta} \|Y - \theta L\|_F^2 = -2(Y - \theta L)L^T = 0 \quad (13)$$

$$\theta = YL^T(LL^T)^{-1} \quad (14)$$

โดยมีเงื่อนไขว่า  $L$  ต้องเป็น เมทริกซ์เต็มขั้น (full rank)

## 5.2 การประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกที่มีเงื่อนไขเกรนเจอร์

เมื่อนำปัญหาใน (10) มารวมเงื่อนไขความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์จะเป็นปัญหา

$$\begin{aligned} &\underset{A,B}{\text{minimize}} \quad \|Y - AH - BK\|_2^2 \\ &\text{subject to} \quad (A_1)_{ij} = (A_2)_{ij} = \dots = (A_p)_{ij} = 0 \quad (i, j) \in I \end{aligned} \quad (15)$$

$I$  คือเซตของดัชนี  $(i, j)$  ของ  $A_k$  โดยที่ทราบว่า  $y_j$  ไม่มีความเกี่ยวข้องเชิงสาเหตุกับ  $y_i$  ที่ทุกค่า  $k = 1, 2, \dots, p$  โดยวิธีการแก้ปัญห (15) ข้างต้นจะเปลี่ยนรูปแบบเมทริกซ์  $A, B, H, K$  ให้อยู่ในรูป  $G, F, x, z$

$$\begin{aligned} &\underset{x,z}{\text{minimize}} \quad \|y - Gx - Fz\|_2^2 \\ &\text{subject to} \quad x_w = 0 \quad (w \in W) \end{aligned} \quad (16)$$

$W$  คือเซตของดัชนี  $w$  โดยที่  $x_w = (A_k)_{ij}$  และ  $(i, j) \in I$  ที่ทุกค่า  $k = 1, 2, \dots, p$  การแก้ปัญหข้างต้นสามารถแก้ได้โดยการแทนค่า  $x_i = 0$  ในสมการ (16) โดยจะเปลี่ยนปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดเป็น

$$\underset{\tilde{x}, z}{\text{minimize}} \quad \|y - \tilde{G}\tilde{x} - Fz\|_2^2 \quad (17)$$

$\tilde{x}$  คือเวกเตอร์  $x$  ที่นำ  $x_w$  ออกโดย  $w \in W$   $\tilde{G}$  เป็น  $G$  ที่นำหลักที่  $w$  ออก ดังนั้น (17) มีคำตอบที่ชัดเจนว่า

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^T \tilde{G} & \tilde{G}^T F \\ F^T \tilde{G} & F^T F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}^T \\ F^T \end{bmatrix} y$$

โดยนำ  $\tilde{x}, z$  ไปเรียงกับเป็นเมทริกซ์จะได้ เมทริกซ์  $A, B$  เป็นคำตอบของ (15) โดยมีเงื่อนไขว่า  $[\tilde{G} \ F]$  ต้องเป็น เมทริกซ์เต็มขั้น (full rank)

## 6 ผลลัพธ์จากการดำเนินการ

ได้ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับ

1. วิธีการประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าแบบมีค่าเงื่อนไขค่าคงที่ 0 ในการประมาณและแบบไม่มีเงื่อนไขค่าคงที่
2. การเรียงเมทริกซ์ให้เป็นเวกเตอร์ เพื่อแก้ปัญหการประมาณค่าแบบจำลองที่มีค่าคงที่ 0 อยู่ในแบบจำลอง

ชุดคำสั่งในโปรแกรม MATLAB

1. ชุดคำสั่งสร้างข้อมูลสังเคราะห์ของแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้า

2. ชุดคำสั่งประมาณพารามิเตอร์ในแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้า ทั้งแบบมีค่าเงื่อนไขค่าคงที่ 0 ในการประมาณ และแบบไม่มีเงื่อนไขค่าคงที่
3. ชุดคำสั่งที่ค่า AIC, BIC ในการเลือกแบบจำลอง

ผลการทดลองเบื้องต้น

1. การนำสัญญาณรบกวนออกจากข้อมูล fMRI
2. ค่าความผิดพลาดตกค้างเมื่อเปลี่ยนความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน
3. ความถูกต้องของการประมาณค่าแบบจำลองเมื่อเปลี่ยนจำนวนข้อมูลที่ใช้ในการประมาณ
4. การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสม

## 6.1 การนำสัญญาณรบกวนออกจากข้อมูล fMRI

ข้อมูล fMRI ที่ได้มานั้นจะมี 2 ส่วนหลักคือ สัญญาณที่เกิดจากกระบวนการในระบบประสาทและสัญญาณที่เกิดจากกระบวนการอื่นที่เกิดจากเกิดในร่างกาย โดยหลักแล้วจะมีสัญญาณรบกวนที่เกิดจากกระบวนการอื่นในร่างกายนั้นคือ สัญญาณที่เกิดจากการหายใจ และสัญญาณที่เกิดจากการเต้นของหัวใจ โดยกระบวนการในระบบประสาทนั้นจะอยู่ในช่วงของความถี่ต่ำและสัญญาณของกระบวนการอื่นในร่างกายจะอยู่ในช่วงที่ความถี่สูงกว่า

โครงการนี้ใช้ Spectral method เป็นวิธีการนำค่าของสัญญาณอื่นในร่างกายออกจากสัญญาณโบลด์ โดยการหาค่า Power spectrum ของสัญญาณโบลด์ ในแต่ละวอกเซล โดยจะพิจารณาจากค่าของวอกเซลที่มีเปอร์เซ็นต์ของ Power spectrum สูงสุด ในช่วง 0.8 Hz และ 1.5 Hz เป็นตัวแทนของสัญญาณการเต้นของหัวใจ และ ช่วงที่มีเปอร์เซ็นต์ของ Power spectrum สูงสุด ในช่วง 0.16 Hz และ 0.3 Hz เป็นตัวแทนของสัญญาณการหายใจ หลังจากนั้นนำ 2 สัญญาณนี้ออกจากทุกอนุกรมเวลาของสัญญาณ BOLD การทดลองนี้ใช้ DRIFTER ที่ toolbox ใน Matlab ดาวน์โหลดได้จาก <http://becs.aalto.fi/en/research/bayes/drifter/>

## 6.2 ค่าความผิดพลาดตกค้างเมื่อเปลี่ยนความแปรปรวนของสัญญาณรบกวน

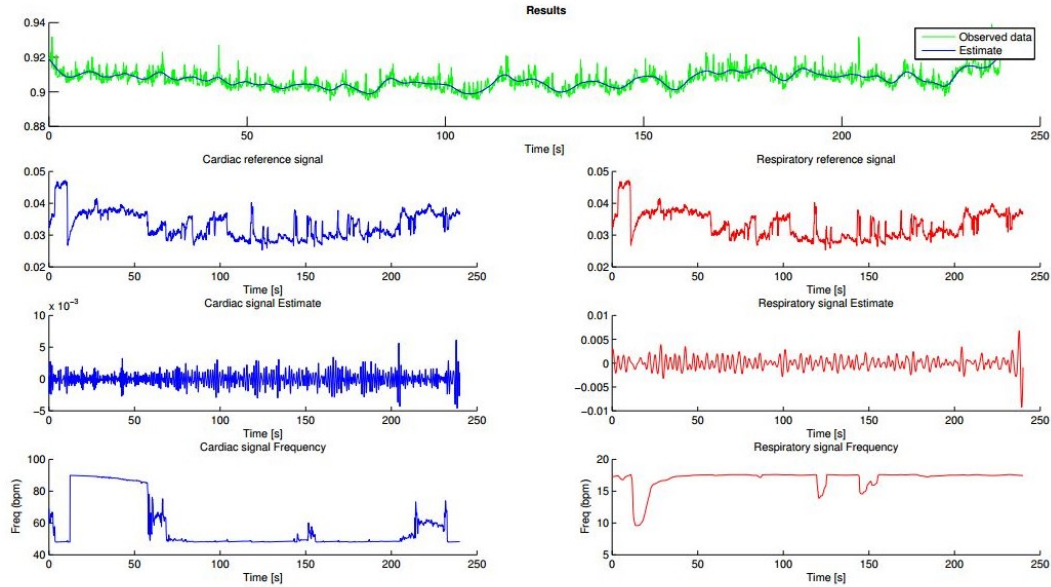
การทดลองนี้จะมีการสร้างข้อมูลที่มีแบบจำลองเป็นแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก โดยให้  $y \in \mathbf{R}^{10}$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $A_k \in \mathbf{R}^{10 \times 10}$  และ  $B_j \in \mathbf{R}^{10}$  โดยมีข้อมูล  $y(1), y(2), \dots, y(100)$ ,  $u(1), u(2), \dots, u(100)$ ,  $p = 4$ ,  $q = 2$  การทดลองนี้จะแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ประเภทคือข้อมูลที่มีสัญญาณรบกวนภายนอกมีค่าเป็น  $e_1 \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$ ,  $e_2 \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$ ,  $e_3 \sim \mathcal{N}(0, 0.7)$ ,  $e_4 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ซึ่งชุดข้อมูลจะมีอยู่ประเภทละ 10 ชุด ดังนั้นจะมีข้อมูลรวม 40 ชุด การทดลองนี้จะนำข้อมูลทั้ง 40 ชุดมาวิเคราะห์หาค่าความผิดพลาดตกค้าง โดยมีสมมุติฐานว่าข้อมูลที่มีค่าของความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนที่มากจะทำให้ค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยที่สูงกว่า

จากรูปที่ 8 จะเห็นว่าค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยจะมีค่ามากเมื่อชุดข้อมูลมีสัญญาณรบกวนที่ค่าแปรปรวนมาก ทั้งการทดลองแบบคิดเงื่อนไขของเกรนเจอร์และไม่รู้เงื่อนไขของเกรนเจอร์

## 6.3 ความถูกต้องของการประมาณค่าแบบจำลองเมื่อเปลี่ยนจำนวนข้อมูลที่นำมาใช้ในการประมาณ

การทดลองนี้จะดูผลของค่าความผิดพลาดของการประมาณแบบจำลองเมื่อจำนวนข้อมูลในการประมาณค่าของแบบจำลองเปลี่ยนไป โดยเราจะสร้างข้อมูลที่เป็นแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก โดย  $y \in \mathbf{R}^{10}$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $A_k \in \mathbf{R}^{10 \times 10}$ ,  $B_j \in \mathbf{R}^{10}$ ,  $e \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$ ,  $p = 4$ ,  $q = 2$  โดยจะสร้าง  $y(1), y(2), \dots, y(2400)$ ,  $u(1), u(2), \dots, u(2400)$  จากแบบจำลองสังเคราะห์แบบหนึ่ง และจะใช้ข้อมูลในการประมาณดังนี้

1.  $y(1), y(2), \dots, y(300), u(1), u(2), \dots, u(300)$



รูปที่ 7: การแยกสัญญาณการหายใจและการเต้นของหัวใจออกจากออกสัญญาณโบลต์  
 กราฟบนสุดแสดงสัญญาณของข้อมูลที่ได้เป็นสีเขียวและข้อมูลที่นำสัญญาณรบกวนออกเป็นสีน้ำเงิน  
 กราฟสีแดงแสดงเป็นกราฟเกี่ยวกับสัญญาณการหายใจและกราฟสีน้ำเงินเป็นกราฟเกี่ยวกับสัญญาณการเต้นของหัวใจ  
 กราฟด้านบนแสดงสัญญาณ BOLD ที่มี Power spectrum สูงสุดในช่วง 0.8 – 1.5 Hz และ 0.16 – 0.3 Hz  
 กราฟตรงกลางแสดงสัญญาณการเต้นของหัวใจและสัญญาณการหายใจ  
 กราฟแสดงค่า Power spectrum ของสัญญาณในกราฟสีน้ำเงินและแดงด้านบน

$$2. y(1), y(2), \dots, y(600), u(1), u(2), \dots, u(600)$$

$$3. y(1), y(2), \dots, y(1200), u(1), u(2), \dots, u(1200)$$

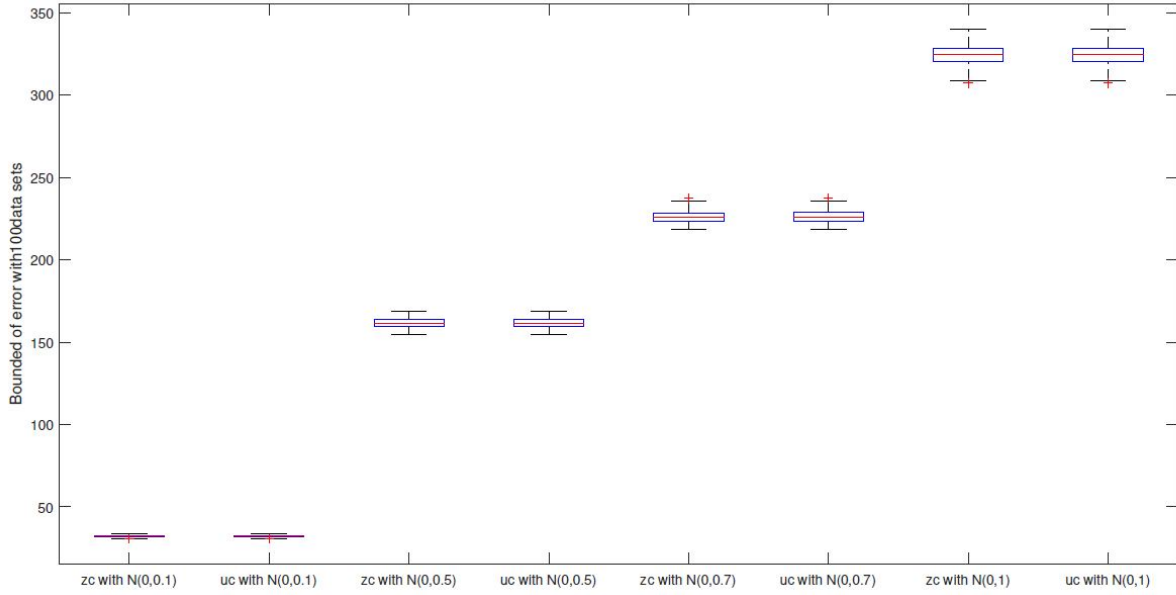
การทดลองนี้มีสมมุติฐานว่าแบบจำลองจะมีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อเพิ่มจำนวนที่ใช้ในการประมาณแบบจำลอง และต้องการดูผลว่าจำนวนข้อมูลที่ใช้ในการประมาณนั้นสามารถช่วยประมาณแบบจำลองได้แม่นยำขึ้นหรือไม่ โดยเทียบผ่านค่ากำลังสองเฉลี่ย

$$\text{error avg} = \frac{\sum_{i=1}^p \|A_i - \hat{A}_i\|_F^2 + \sum_{i=1}^q \|B_i - \hat{B}_i\|_F^2}{p + q}$$

เห็นได้ว่าค่าจากข้อมูลที่มีจำนวนน้อยกว่าย่อมได้ค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ในแบบจำลองที่มีมากกว่า หรือแบบจำลองมีความแม่นยำต่ำกว่า ดังแสดงในตารางที่ 1

	error_300_data	error_600_data	error_1200_data
<i>error_A</i> <sub>1</sub>	0.68619	0.2365	0.2365
<i>error_A</i> <sub>2</sub>	1.2492	0.56347	0.23491
<i>error_A</i> <sub>3</sub>	1.1646	0.60372	0.28544
<i>error_A</i> <sub>4</sub>	0.40715	0.2945	0.1607
<i>error_B</i> <sub>1</sub>	5.0978	5.1126	5.1102
<i>error_B</i> <sub>2</sub>	3.8473	3.8529	3.8658
<i>error_avg</i>	2.0754	1.8038	1.6489

ตาราง 1: ค่าความผิดพลาดของการประมาณแบบจำลอง



รูปที่ 8: ค่าความผิดพลาดตกค้างของแบบจำลองเมื่อค่าความแปรปรวนของสัญญาณรบกวนมีค่าเปลี่ยนไป กราฟที่แสดงจะแสดงการกระจายของค่าความผิดพลาดตกค้าง ค่าในกล่องสี่เหลี่ยมแสดงถึงค่าที่อยู่ในช่วงควอไทล์ที่ 1 ถึงควอไทล์ที่ 3 เส้นสีแดงคือควอไทล์ที่ 2 และขอบคือค่าสูงสุดและต่ำสุดของค่าความผิดพลาดตกค้าง

#### 6.4 การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสม

การทดลองนี้สร้างแบบจำลองสังเคราะห์โดย  $y \in \mathbf{R}^{10}$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $A_k \in \mathbf{R}^{10 \times 10}$ ,  $B_j \in \mathbf{R}^{10}$ ,  $p = 4$ ,  $q = 2$  และ  $e \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$  เป็นการทดลองเพื่อหาค่าความแบบจำลองแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก ว่าค่า  $p$  และ  $q$  ในแบบจำลองควรมีค่าเป็นเท่าใด การทดลองนี้จะทดสอบโดยใช้ค่า AIC และค่า BIC จะเลือกแบบจำลองที่ให้ค่า AIC หรือ BIC ต่ำสุด

$$\text{AIC} = -2\mathcal{L} + 2d \quad (18)$$

$$\text{BIC} = -2\mathcal{L} + d \log N \quad (19)$$

ค่า  $\mathcal{L}$  เป็นค่าลอการิทึมของฟังก์ชันความเป็นไปได้ (log likelihood function) ค่า  $d$  คือ จำนวนตัวแปรที่มีผลต่อการประมาณ ถ้ากำหนดแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก มี  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}^m$ ,  $p$  เป็นอันดับการถดถอยตัวเอง,  $q$  เป็นถดถอยของสัญญาณขาเข้าเป็น และ  $a_{zc}$  เป็นจำนวนของคู่อันดับ  $(i, j)$  ใน  $A_k$  ที่เรารู้เงื่อนไขของเกรนเจอร์ว่า  $y_j$  ไม่มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุกับ  $y_i$  จะได้  $d$  เป็นดังสมการ

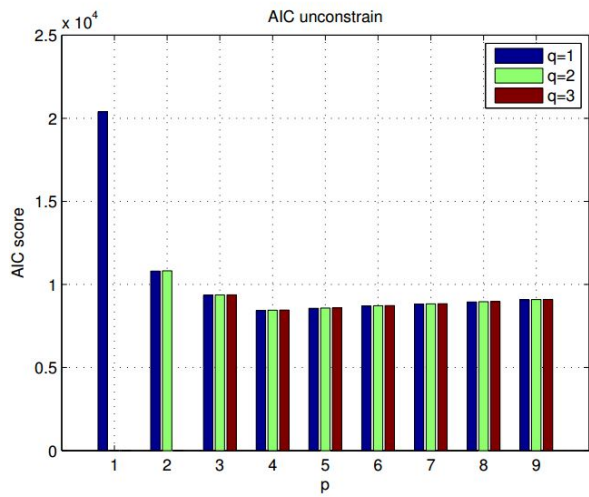
$$d = p(n^2 - a_{zc}) + nmq$$

และเรารู้ค่าของสัญญาณรบกวนคือ  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$  จะได้ค่า  $\mathcal{L}$  ว่า

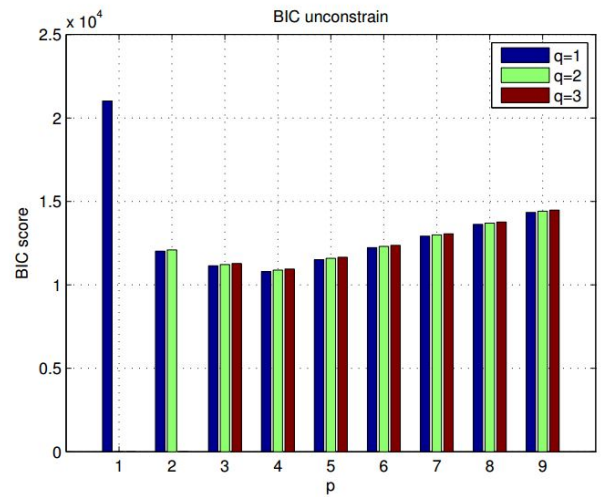
$$\mathcal{L}(\hat{A}, \hat{B}, \Sigma) = \frac{N-p}{2} \log \det \Sigma^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^N (y(i) - \hat{y}(i))^T \Sigma^{-1} (y(i) - \hat{y}(i))$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^p \hat{A}_i y(t-i) + \sum_{i=1}^q \hat{B}_i u(t-i)$$

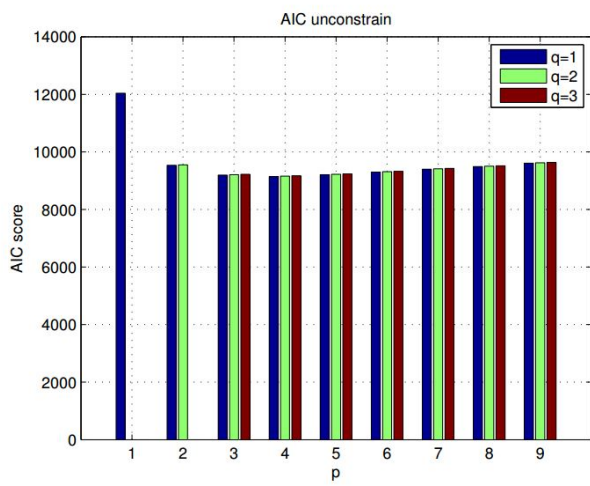
AIC, BIC สามารถเลือกอันดับของแบบจำลองได้แม่นยำหรือไม่ ผ่าน AIC, BIC การทดลองนี้จะมีการวิเคราะห์การเลือกแบบจำลองผ่านค่า โดยค่าที่ได้คือค่า  $p$  และ  $q$  โดย  $p$  อันดับการถดถอยของตัวเอง และ  $q$  คืออันดับการถดถอยของสัญญาณขาเข้า โดยมีสมมุติฐานว่าค่า BIC ที่เบาบางได้ดี ข้อมูลที่เบาบางนั้นคือแบบจำลองมีค่า 0 จำนวนมากในแบบจำลอง และค่า AIC จะสามารถเลือกแบบจำลองที่หนาแน่นได้ดี



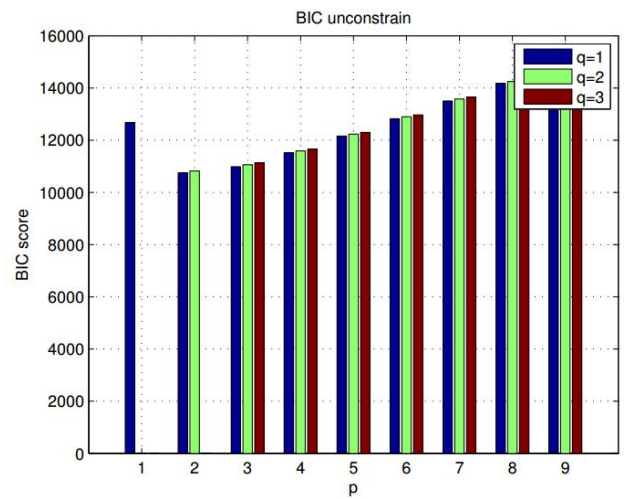
(a) ค่าของ AIC เมื่อแบบจำลองที่สังเคราะห์ขึ้นมาเป็นแบบหนาแน่น



(b) ค่าของ BIC เมื่อแบบจำลองที่สังเคราะห์ขึ้นมาเป็นแบบหนาแน่น



(c) ค่าของ AIC เมื่อแบบจำลองที่สังเคราะห์ขึ้นมาเป็นแบบเบาบาง



(d) ค่าของ BIC เมื่อแบบจำลองที่สังเคราะห์ขึ้นมาเป็นแบบเบาบาง

รูปที่ 9: การเปรียบเทียบค่า AIC, BIC

จากรูป 9 จะเห็นว่าค่า AIC จะเลือกแบบจำลองที่มีอันดับที่สูงกว่า BIC ค่า AIC นั้นสามารถเลือกอันดับของแบบจำลองได้แม่นยำกว่าค่า BIC ค่า BIC สามารถเลือกแบบจำลองที่เบาบางได้ดี และ AIC จะสามารถเลือกแบบจำลองที่หนาแน่นได้ดี



## 7 สรุปภาพรวมของโครงการงาน

ในการศึกษาสภาพการเชื่อมโยงของสมองโดยใช้สมการพลวัตในการอธิบาย ใน [2] ใช้แบบจำลองถดถอยตัวเอง ที่ไม่รวมกับสัญญาณการกระตุ้นภายนอกแต่ความเป็นจริงนั้นการกระตุ้นภายนอกควรมีผลต่อสภาพการเชื่อมโยงของสมอง และข้อมูลที่ได้จาก [4] เป็นข้อมูล fMRI ที่มีกระตุ้นภายนอกด้วยการเห็นภาพและเคลื่อนไหว โครงการงานนี้จึงเปลี่ยนแบบจำลองที่มาอธิบายข้อมูลจาก [4] โดยเปลี่ยนจากแบบจำลองถดถอยตัวเอง เป็นแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก ที่สามารถอธิบายผลต่อสัญญาณขาเข้าว่ามีผลต่อสัญญาณขาออกอย่างไร โดยแบบจำลองยังเป็นแบบจำลองเชิงเส้นอยู่ การประมาณจะใช้วิธีการประมาณแบบกำลังสองต่ำสุด จะมีการวิเคราะห์ความถูกต้องของแบบจำลองและโครงสร้างเชิงเหตุผลผ่านการประมาณด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบ  $l_1$ -regularized โครงการงานนี้จากข้อมูล fMRI ของ [4] โดยใช้ชุดคำสั่งที่เขียนในโปรแกรม MATLAB

### 7.1 ขอบเขตของโครงการงาน

1. โครงการงานนี้จะพิจารณาแบบจำลองที่รวมตัวแปรสัญญาณขาเข้าที่ทราบค่าในรูปแบบจำลองเชิงเส้น
2. โครงการงานนี้จะพิจารณาแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก และใช้การประมาณค่าตัวแปรแบบกำลังสองต่ำสุด
3. โครงการงานนี้จะเปรียบเทียบข้อมูลของสัญญาณขาเข้า 2 แบบคือ MV และ VM จาก [4]
4. โครงการงานนี้จะทดสอบแบบจำลองที่นำเสนอขึ้นบนข้อมูลที่สังเคราะห์และข้อมูลจริง

### 7.2 ผลลัพธ์ที่คาดหวังจากโครงการงาน

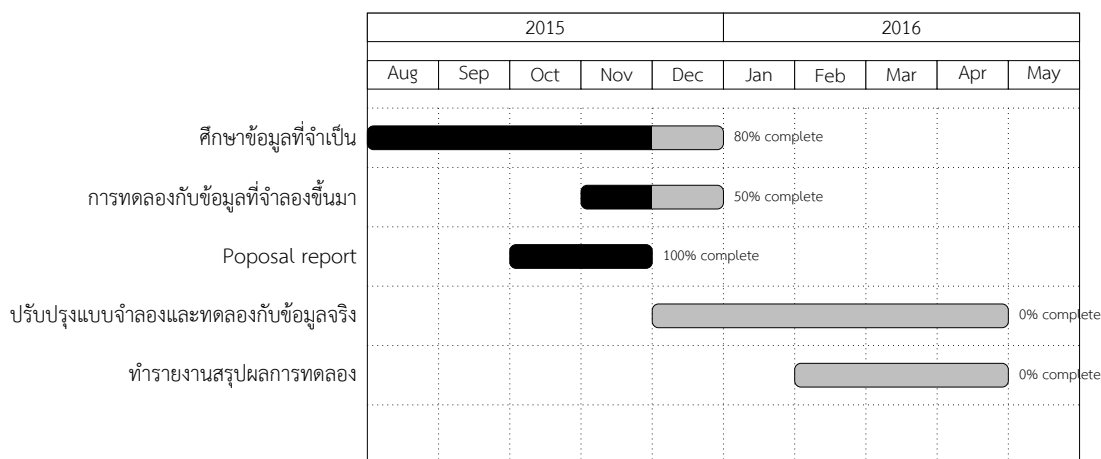
1. รูปแบบปัญหาการประมาณแบบจำลองแบบถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก ที่ใช้อธิบายการเชื่อมโยงของสมอง
2. ชุดคำสั่งแก้ปัญหาการประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก ผ่านโปรแกรม Matlab

### 7.3 แนวทางการดำเนินการ

1. ศึกษาลักษณะของข้อมูล fMRI
2. ศึกษาแบบจำลองเชิงเส้นที่รวมตัวแปรสัญญาณขาเข้าที่ทราบค่าที่เหมาะสมในการอธิบายพลวัตของ fMRI
3. ศึกษาการวิเคราะห์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์และการแก้ปัญหาการประมาณแบบจำลองที่รวมเงื่อนไขดังกล่าว
4. ทดสอบแบบจำลองที่นำเสนอขึ้นบนข้อมูลสมองที่สังเคราะห์ขึ้นเพื่อตรวจสอบความมีประสิทธิภาพของแนวทางที่นำเสนอ
5. นำข้อมูลสมองที่เกิดจากการกระตุ้นด้วยสิ่งเร้ามาเรียนรู้ความเชื่อมโยงของสมองด้วยแบบจำลองที่นำเสนอ
6. สรุปผลและปรับปรุงแนวทาง

## เอกสารอ้างอิง

- [1] M. A. Lindquist *et al.*, “The Statistical analysis of fMRI data,” *Statistical Science*, vol. 23, no. 4, pp. 439–464, 2008.
- [2] A. Pongrattanakul, P. Lertkultanon, and J. Songsiri, “Sparse system identification for discovering brain connectivity from fmri time series,” in *SICE Annual Conference (SICE), 2013 Proceedings of*, pp. 949–954, IEEE, 2013.



รูปที่ 10: Gantt chart of the project

- [3] K. J. Friston, A. Mechelli, R. Turner, and C. J. Price, “Nonlinear responses in fMRI: the Balloon model, Volterra kernels, and other hemodynamics,” *Neuroimage*, vol. 12, no. 4, pp. 466–477, 2000.
- [4] F.-H. Lin, T. Witzel, T. Raji, J. Ahveninen, K. W.-K. Tsai, Y.-H. Chu, W.-T. Chang, A. Nummenmaa, J. R. Polimeni, W.-J. Kuo, *et al.*, “fMRI hemodynamics accurately reflects neuronal timing in the human brain measured by MEG,” *Neuroimage*, vol. 78, pp. 372–384, 2013.
- [5] “ตรวจสุขภาพลึกเข้าไป’MRI’เห็นข้างในรู้ทันโรค.” <http://www.clipmass.com/story/35886>. Accessed: 2011-08-22.
- [6] M. A. Lindquist, J. M. Loh, L. Y. Atlas, and T. D. Wager, “Modeling the hemodynamic response function in fmri: efficiency, bias and mis-modeling,” *Neuroimage*, vol. 45, no. 1, pp. S187–S198, 2009.
- [7] O. J. Arthurs and S. Boniface, “How well do we understand the neural origins of the fMRI BOLD signal?,” *Trends in neurosciences*, vol. 25, no. 1, pp. 27–31, 2002.
- [8] A. Pruttiakaravanich and J. Songsiri, “A Review on dependence measures in exploring brain networks from fMRI data,” *Engineering Journal*, vol. 20, no. 3, pp. 207–233, 2016.
- [9] A. Fornito, A. Zalesky, and M. Breakspear, “Graph analysis of the human connectome: promise, progress, and pitfalls,” *Neuroimage*, vol. 80, pp. 426–444, 2013.
- [10] A. Razi and K. Friston, “The connected brain: Causality, models, and intrinsic dynamics,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 33, no. 3, pp. 14–35, 2016.
- [11] X. Zhang, B. Hu, X. Ma, and L. Xu, “Resting-state whole-brain functional connectivity networks for mci classification using l2-regularized logistic regression,” *IEEE transactions on nanobioscience*, vol. 14, no. 2, pp. 237–247, 2015.
- [12] K. Friston, R. Moran, and A. K. Seth, “Analysing connectivity with granger causality and dynamic causal modelling,” *Current opinion in neurobiology*, vol. 23, no. 2, pp. 172–178, 2013.
- [13] C. W. Granger, “Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 424–438, 1969.

## 8 ภาคผนวก

### 8.1 Pairwise Granger Causality

เทคนิค Pairwise Granger Causality หรือ Pairwise GC เป็นเทคนิคที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณ 2 กลุ่ม ข้อดีคือสามารถหาค่าตามผลเฉลยได้ง่าย และให้คำตอบที่ชัดเจน สำหรับคู่สัญญาณสเกลาร์  $x(t) \in \mathbb{R}$  และ  $y(t) \in \mathbb{R}$  ในการประมาณสัญญาณโดยอธิบายได้ตามสมการด้านล่าง

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a_k x(t-k) + \epsilon_1(t) \quad \mathbf{var}(\epsilon_1(t)) = \Sigma_1 \quad (20)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^p c_k y(t-k) + \nu_1(t) \quad \mathbf{var}(\nu_1(t)) = \Gamma_1 \quad (21)$$

และถ้าสองกลุ่มนี้มีความสัมพันธ์เชิงสาเหตุต่อกันจะสามารถเขียนได้ว่า

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a'_k x(t-k) + \sum_{k=1}^p b'_k y(t-k) + \epsilon_2(t) \quad (22)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^p c'_k y(t-k) + \sum_{k=1}^p d'_k x(t-k) + \nu_2(t) \quad (23)$$

ใน (22) เป็นการใส่ค่า  $y$  มาช่วยในการทำนายค่า  $x$  ใน (23) เป็นการใส่ค่าของ  $x$  มาช่วยในการทำนายค่า  $y$  เมทริกซ์ความแปรปรวนรวมของ  $\begin{bmatrix} \epsilon_2(t) \\ \nu_2(t) \end{bmatrix}$  คือ  $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_2 & \Upsilon_2 \\ \Upsilon_2 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$  เมื่อให้  $\Sigma_2 = \mathbf{var}(\epsilon_2(t))$ ,  $\Gamma_2 = \mathbf{var}(\nu_2(t))$ ,  $\Upsilon_2 = \mathbf{cov}(\epsilon_2(t), \nu_2(t))$  ถ้า  $x(t)$  และ  $y(t)$  เป็นอิสระต่อกันแล้ว ใน (22), (23)  $\Upsilon_2 = 0$  ใน [13] กล่าวเอาไว้ว่าจะหาปริมาณที่  $y(t)$  มีผลกระทบเชิงสาเหตุต่อ  $x(t)$  ได้จาก

$$F_{y \rightarrow x} = \log\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right) \quad (24)$$

จะเห็นว่าค่าของ  $F_{y \rightarrow x}$  นั้นจะมีค่าที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอเพราะการมีค่า  $y$  มาช่วยในการทำนายค่า  $x$  ควรจะช่วยให้การทำนายดีขึ้นหรือ  $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$  แต่ถ้า  $F_{y \rightarrow x} = 0$  หรือ  $\Sigma_2 = \Sigma_1$  นั้นหมายความว่าของ  $y(t)$  ไม่สามารถช่วยในการทำนายค่าของ  $x(t)$  ได้เลยหรือ  $b'_k = 0$  โดย  $k = 1, 2, \dots, p$  แต่ถ้า  $F_{y \rightarrow x} > 0$  หรือ  $\Sigma_2 < \Sigma_1$  เมื่อ  $y(t)$  มีผลกระทบเชิงสาเหตุ  $x(t)$  หรือ  $b'_k \neq 0$  โดย  $k = 1, 2, \dots, p$

แต่ว่าการใช้วิธีนี้มีข้อเสียสำหรับการคิดเป็นจำนวนตัวแปรที่ต้องการคิดความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ นั้นมีจำนวนมาก ดูได้ตามรูป 11 เป็นการแสดงความสัมพันธ์เชิงเหตุผลของสัญญาณ  $y(t) \in \mathbb{R}$  และ  $z(t) \in \mathbb{R}$  ที่มีผลต่อ  $x(t) \in \mathbb{R}$  ในการคิดแบบ Pairwise GC เมื่อหาค่าความสัมพันธ์เชิงสาเหตุที่  $y(t)$  ส่งผลต่อ  $x(t)$  แม้ว่า  $y(t)$  จะไม่มีผลโดยตรงต่อ  $x(t)$  แต่มีผลทางอ้อมผ่าน  $z(t)$  แบบรูปที่ 11a ก็จะทำให้ค่าคงที่บอกค่า  $y(t)$  ก็จะบ่งบอกว่า  $y(t)$  มีผลทางตรงต่อ  $x(t)$  แบบรูปที่ 11b ดังนั้นเมื่อข้อมูลมีมากกว่า 3 กลุ่มขึ้นไป Conditional Granger Causality จึงเป็นเทคนิคที่ใช้ในการหาความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ โดยสามารถแยกความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบรูปที่ 11a และ 11b

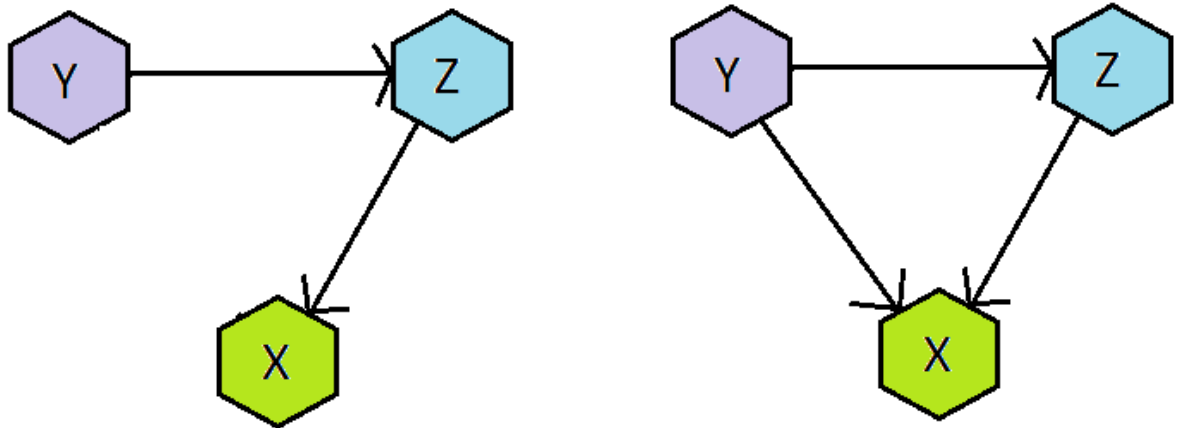
### 8.2 การประมาณแบบจำลอง ARX ที่มีเงื่อนไขเกรนเจอร์

ในส่วนนี้จะอธิบายการแก้ปัญหาใน (15) ด้วยการเรียงให้เป็นเวกเตอร์

$$\begin{aligned} & \underset{A, B}{\text{minimize}} \quad \|Y - AH - BK\|_2^2 \\ & \text{subject to} \quad (A_1)_{ij} = (A_2)_{ij} = \dots = (A_p)_{ij} = 0 \quad (i, j) \in I \end{aligned}$$

เปลี่ยนเป็นปัญหาการหาเหมาะสมสุด

$$\begin{aligned} & \underset{x, z}{\text{minimize}} \quad \|y - Gx - Fz\|_2^2 \\ & \text{subject to} \quad x_w = 0 \quad (w \in W) \end{aligned}$$



(a) ภาพแสดงความสัมพันธ์เชิงสาเหตุแบบเกรนเจอร์โดยที่  $y$  นั้นส่งผลต่อ  $z$  และ  $z$  ส่งผลต่อ  $x$  แต่  $y$  ไม่ส่งผลต่อ  $x$  โดยตรง

(b) ภาพแสดงความสัมพันธ์เชิงสาเหตุแบบเกรนเจอร์โดยที่  $y$  นั้นส่งผลต่อ  $z$  และ  $z$  ส่งผลต่อ  $x$  แต่  $y$  ไม่ส่งผลต่อ  $x$  โดยตรง

รูปที่ 11: ตัวอย่างความสัมพันธ์เชิงเหตุผลแบบเกรนเจอร์ของ  $x, y$  และ  $z$

กำหนดว่า

$$A = [A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_p] \in \mathbb{R}^{n \times np} \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$B = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_q] \in \mathbb{R}^{n \times mq} \quad B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, \ (i = 1, 2, \dots, q)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times N} \quad H_i \in \mathbb{R}^{n \times N}, \ (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mq \times N} \quad K_i \in \mathbb{R}^{m \times N}, \ (i = 1, 2, \dots, q)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,n} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 p} \quad x_{i,j} = \begin{bmatrix} (A_1)_{i,j} \\ (A_2)_{i,j} \\ \vdots \\ (A_p)_{i,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \ (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$z = \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ \vdots \\ z_{1,m} \\ z_{2,1} \\ \vdots \\ z_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nmq} \quad z_{i,j} = \begin{bmatrix} (B_1)_{i,j} \\ (B_2)_{i,j} \\ \vdots \\ (B_q)_{i,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q, \ (i = 1, 2, \dots, n), \ (j = 1, 2, \dots, m)$$

ຈາກ (??)

$$\begin{aligned}\|Y - AH - BK\|_F^2 &= \sum_{s,t} (Y_{st} - (AH)_{st} - (BK)_{st})^2 \\ &= \sum_{s,t} (Y_{st} - \sum_{k=1}^{np} (A)_{sk}(H)_{kt} - \sum_{k=1}^{mq} (B)_{sk}(K)_{kt})^2\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{np} (A)_{sk}(H)_{kt} = \sum_{k=1}^n [(H_1)_{kt} \quad (H_2)_{kt} \quad \cdots \quad (H_p)_{kt}] \begin{bmatrix} (A_1)_{sk} \\ (A_2)_{sk} \\ \vdots \\ (A_p)_{sk} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathcal{H}_{k,t} x_{sk}$$

$$\sum_{k=1}^{mq} (B)_{sk}(K)_{kt} = \sum_{k=1}^m [(K_1)_{kt} \quad (K_2)_{kt} \quad \cdots \quad (K_q)_{kt}] \begin{bmatrix} (B_1)_{sk} \\ (B_2)_{sk} \\ \vdots \\ (B_q)_{sk} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m \mathcal{K}_{k,t} x_{sk}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{s,1} \\ Y_{s,2} \\ \vdots \\ Y_{s,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{1,1} & \mathcal{H}_{1,2} & \cdots & \mathcal{H}_{1,n} \\ \mathcal{H}_{2,1} & \mathcal{H}_{2,2} & \cdots & \mathcal{H}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{H}_{N,1} & \mathcal{H}_{N,2} & \cdots & \mathcal{H}_{N,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s,1} \\ x_{s,2} \\ \vdots \\ x_{s,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1,1} & \mathcal{K}_{1,2} & \cdots & \mathcal{K}_{1,m} \\ \mathcal{K}_{2,1} & \mathcal{K}_{2,2} & \cdots & \mathcal{K}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N,1} & \mathcal{K}_{N,2} & \cdots & \mathcal{K}_{N,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{s,1} \\ z_{s,2} \\ \vdots \\ z_{s,m} \end{bmatrix}$$

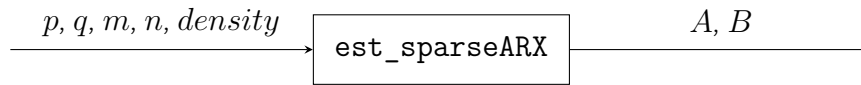
$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{1,1} & \mathcal{H}_{1,2} & \cdots & \mathcal{H}_{1,n} \\ \mathcal{H}_{2,1} & \mathcal{H}_{2,2} & \cdots & \mathcal{H}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{H}_{N,1} & \mathcal{H}_{N,2} & \cdots & \mathcal{H}_{N,n} \end{bmatrix}, \mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1,1} & \mathcal{K}_{1,2} & \cdots & \mathcal{K}_{1,m} \\ \mathcal{K}_{2,1} & \mathcal{K}_{2,2} & \cdots & \mathcal{K}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}_{N,1} & \mathcal{K}_{N,2} & \cdots & \mathcal{K}_{N,m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1,2} \\ \vdots \\ Y_{1,N} \\ Y_{2,1} \\ \vdots \\ Y_{n,N} \end{bmatrix} - (I_n \otimes \mathcal{H}) \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{bmatrix} - (I_n \otimes \mathcal{K}) \begin{bmatrix} z_{1,1} \\ \vdots \\ z_{1,n} \\ z_{2,1} \\ \vdots \\ z_{n,n} \end{bmatrix}$$

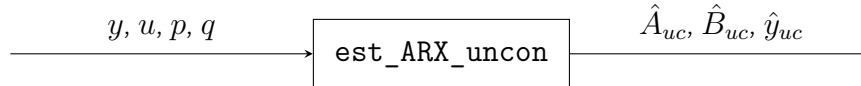
$$G = I_n \otimes \mathcal{H}, F = I_n \otimes \mathcal{K}, y = \begin{bmatrix} Y_{1,1} \\ Y_{1,2} \\ \vdots \\ Y_{n,n} \end{bmatrix}$$

### 8.3 ชุดคำสั่ง MATLAB ที่ใช้ในโครงการ

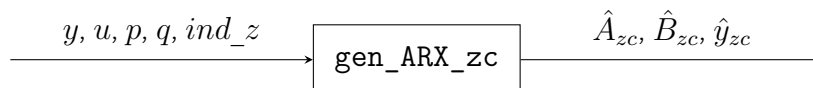
- **gen\_sparseARX** เป็นฟังก์ชันที่สร้างแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอก มีอินพุตเป็น  $p, q, n, m, density$  และเอาต์พุตเป็น  $A$  และ  $B$



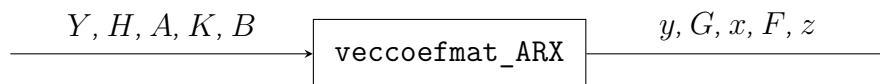
- **est\_ARX\_uncon** เป็นฟังก์ชันที่ประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดโดยที่ไม่มีเงื่อนไขเกรนเจอร์ มีอินพุตเป็น  $y, u, p, q$  และเอาต์พุตเป็น  $\hat{A}_{uc}, \hat{B}_{uc}, \hat{y}_{uc}$



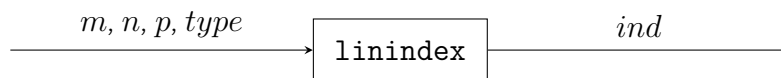
- **est\_ARX\_zc** เป็นฟังก์ชันที่ประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบมีเงื่อนไขเกรนเจอร์ มีอินพุตเป็น  $y, u, p, q, ind_z$  เอาต์พุต  $\hat{A}_{zc}, \hat{B}_{zc}, \hat{y}_{zc}$  โดย **est\_ARX\_zc** มีฟังก์ชันย่อยคือ **veccoefmat\_ARX**, **eliminate**, **include** และ **form\_A**



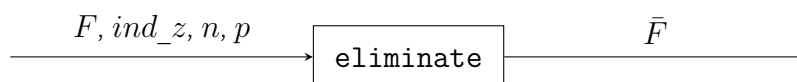
- ▶ **veccoefmat\_ARX** เป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนเมทริกซ์  $A, B$  เป็นเวกเตอร์ในปัญหา  $\|Y - AH - BK\|_F^2 = \|y - Gx - Fz\|_2^2$  ใช้อินพุตเป็น  $Y, A, B, H, K$  เอาต์พุต  $G, F, x, z, y_{vec}$



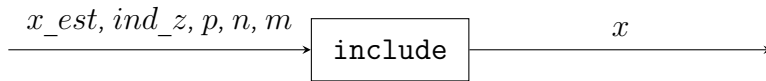
- **linindex** เป็นฟังก์ชันย่อยที่อยู่ใน **veccoefmat\_ARX** ที่ได้ค่าดัชนีในเมทริกซ์ในการเรียงเวกเตอร์ในปัญหา  $\|Y - AH - BK\|_F^2 = \|y - Gx - Fz\|_2^2$  โดยใช้อินพุตเป็น  $y, u$  เอาต์พุต  $ind$



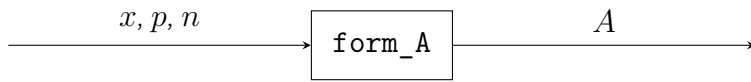
- ▶ **eliminate** เป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนเมทริกซ์  $F$  เป็น  $\tilde{F}$  มีอินพุตเป็น  $F, ind_z, n, p$  เอาต์พุต  $\tilde{F}$



- ▶ **include** เป็นฟังก์ชันนำค่า 0 คืนกลับไปใน  $x_{est}$  โดยใช้อินพุตเป็น  $y, u$  เอาต์พุต



► **form\_A** เป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยน  $x, z$  เมทริกซ์  $A, B$  มีอินพุตเป็น  $x, p, n$  เอาต์พุต  $A$



• **gen\_time\_series** เป็นฟังก์ชันที่สร้างอนุกรมเวลาของแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้า ประมาณแบบจำลองถดถอยตัวเองแบบมีสัญญาณขาเข้าภายนอกด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบมีเงื่อนไขเกรนเจอร์ โดยใช้อินพุตเป็น  $A, B, u, y_{st}$  และ  $noise\_variance$  มีเอาต์พุตเป็น  $y$  ตามสมการ

$$y(t) = A_1 y(t-1) + \dots + A_p y(t-p) + B_1 u(t-1) + B_q u(t-q) + e(t)$$

